Тема лекции 10. Понятие функционального ряда. Степенные ряды и их свойства. Теорема Абеля.

Цель лекции:
Сформировать у студентов представление о функциональных и степенных рядах, их областях сходимости, свойствах, а также понимание применения теоремы Абеля.

Основные вопросы:

1. Понятие функционального ряда.
2. Равномерная и поточечная сходимость функциональных рядов.
3. Степенные ряды: определение и примеры.
4. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
5. Свойства степенных рядов: дифференцирование и интегрирование по членам.
6. Теорема Абеля о поведении степенных рядов на границе интервала сходимости.

Ряд, членами которого являются функции от x, называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

Придавая x определенное значение x_0 , мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется точкой сходимости ряда (1); если же ряд расходится – точкой расходимости ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости. В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: *S = S(x).* Определяется она в области сходимости равенством

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$ - частичная сумма ряда

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т. е. так называемый степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

Действительные (или комплексные) числа ao, a 1 , a2 , ... , an, ... называются коэффициентами ряда (2), $x \in R$ - действительная переменная.

Ряд (2) расположен по степеням x. Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням (x – x_0), т. е. ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \ldots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \qquad (3)$$

где x_0 - некоторое постоянное число.

Ряд (3) легко приводится к виду (2), если положить x-x0 = z. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (2)

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема 1. (Абель). Если степенной ряд (2) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$

Следствие 63.1. Если ряд (62.3) расходится при

Следствие 1. Если степенной ряд (2) расходится $x = x1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал ($-|x_0|$; $|x_0|$) весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала ряд (2) расходится.

Определение. Интервал ($-|x_0|$; $|x_0|$) и называется интервалом сходимостистепенного ряда.

Положив $|x_0|=R$ интервал сходимости можно записать в виде $(-R;R)$. Число R называют радиусом сходимости степенного ряда, т.е. $R>0$ – это такое число, что при всех x, для которых $|x|<R$, ряд (2) абсолютно сходится, а при $|x|<R$ ряд расходится.

В частности, когда ряд (2) сходится лишь в одной точке $x_0=0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (2) сходится при всех значениях $x \in R$ (т. е. во всех точках числовой оси), то считаем, что R = ∞. Отметим, что на концах интервала сходимости (т. е. при x = R и

при x = - R) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Радиус сходимости степенного ряда (2) определяется следующим образом (исходя из признака Даламбера):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{4}$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{5}$$

Свойства степенных рядов.

1. Сумма S(x) степенного ряда (2) является непрерывной функцией в интервале сходимости (- R; R).
2. Степенные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ имеющие радиусы сходимости соответственно R1 и R2 , можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R1 и R2
3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать
4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда (2) при -R <a< x < R выполняется равенство $\int_a^x S(t)\,dt = \int_a^x a_0\,dt + \int_a^x a_1 t \quad dt + \int_a^x a_2 t^2\,dt + \cdots + \int_a^x a_n t^n\,dt + \cdots$

Пример 1. . Найти область сходимости ряда : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^n x^n$

$a_n=(-1)^{n-1}n^n$; $|a_n|=n^n$ $|a_{n+1}|=(n+1)^{n+1}$ =>

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}==\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}}\cdot 0=e\cdot 0=0$$

Ряд сходится в одной точке $x=0$

Контрольные вопросы:

- Что называется функциональным рядом?
- В чём отличие равномерной сходимости от поточечной?
- Дайте определение степенного ряда.
- Как определяется радиус сходимости степенного ряда?
- Какие операции допускаются над степенными рядами внутри интервала сходимости?
- Сформулируйте теорему Абеля.

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994
2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004
3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.
7. Шипачев В.С. Высшая математика
8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.
9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.